PROBLEME1

Soit la fonction f définie par f(x) = $-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) a- dresser le tableau de variation de f

   b- Etudier les variations de la fonction φ : $x \mapsto f(x)-x$ sur $\left]-1;1\right[$.

   Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\left]-1;1\right[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\dfrac{4}{5};1\right[$. Donner le signe de $\varphi(x)$

2) a- Montrer que f réalise une bijection de $\left]-1;1\right[$ sur IR , on note f^{-1} sa fonction réciproque

   b- Démontrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$, $\forall x \in$ IR

3) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 \in [0;\alpha]$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$; $\forall n \in$ IN

a- Montrer que : $\forall n \in$ IN ; $U_n \in [0;\alpha]$

b- Utiliser le signe de $\varphi(x)$ pour montrer que : $\forall x \in [0;\alpha]$ on a, $f^{-1}(x) \geq x$.

Montrer alors que la suite (Un) est monotone et en déduire que (Un) est convergente et déterminer sa limite

1) Pour tout de $\left]-1;1\right[$, on pose h(x) = f [cos($\dfrac{\pi}{2}$(x+1)]

a- Montrer que : $\forall x \in \left]-1;1\right[$ on a h(x) = -1 + cotg [($\dfrac{\pi}{2}$(x+1)]

b- Montrer que h réalise une bijection de $\left]-1;1\right[$ sur IR. On note h^{-1} sa fonction réciproque

c- Montrer que h-1 est dérivable sur IR et que (h-1)'(x) = $-\dfrac{2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

2) Pour tout x de IR* , on pose H(x) = $h^{-1}(x-1) + h^{-1}(\dfrac{1}{x}-1)$

a- Montrer que H est dérivable sur IR* et calculer H'(x)

b- Calculer h($-\dfrac{1}{2}$) et h($\dfrac{1}{2}$) , en déduire que : $\forall x \in IR^*_+$; H(x) = -1

   : $\forall x \in IR^*_-$; H(x) = 1

c- Pour tout n de IN* on pose $V_n = \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}(\frac{1}{k}) + h^{-1}(-\frac{1}{k})]$ et $W_n = \dfrac{1}{n}V_n$

 * Montrer que $h^{-1}(\dfrac{1}{k}) + h^{-1}(\dfrac{-1}{k+1}) = -1$ $\forall k \in$ IN*

 **) Montrer que $\forall n \in$ IN* ; $V_n = -n - h\text{-}1(-\dfrac{1}{1+n})$, en déduire que la suite (W_n) est convergente et donner sa limite

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = $\dfrac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur IR tel que F(0) = 0

1) a- Montrer que $\forall x \in IR_-$: $x \leq F(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3$

b- Montrer que $\forall x \in IR_+$: $x - \frac{1}{3}x^3 \leq F(x) \leq x$

2) Calculer alors : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2}$

3) Soit G la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} G(x) = \dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ G(0) = 1 \end{cases}$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de G en 0

b- Déterminer le signe de H(x) = $\dfrac{x}{1+x^2}$ - F(x) puis donner le sens de variation de G sur IR

4) On pose $\varphi(x) = F(\dfrac{1}{1+x}) + F(\dfrac{x}{2+x})$ pour tout x $\in IR_+$

a- Montrer que φ est dérivable sur IR_+ et calculer H'(x)

b- Vérifier que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ F(tg(x)) = x puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

c- En déduire que $F(\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$

d- Montrer que F réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera

Déterminer $F^{-1}(x)$ pour tout x de J